

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

BÀI. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN



IV

HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hai đường cong $(C): y = -x^3 + 12x$ và $(P): y = -x^2$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) .

a) (P) cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

b) $S = \int_0^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx$.

c) $S = \left| \int_{-3}^4 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right|$.

d) $S = \frac{937}{12}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng vì phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là

$$-x^3 + 12x = -x^2 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -3 \end{cases}.$$

b) Sai vì $S = \int_{-3}^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx$.

c) Sai vì $S = \int_{-3}^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx = \left| \int_{-3}^0 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| + \left| \int_0^4 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right|$.

d) Đúng vì $S = \int_{-3}^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx = \int_{-3}^0 |x^3 - x^2 - 12x| dx + \int_0^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx = \frac{99}{4} + \frac{160}{3} = \frac{937}{12}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + xf'(x) = 4x^3 + 4x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$.

a) $f(0) = 2$.

b) $f'(x) = 3x^2 + 2$.

c) $S = \int_1^2 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx$.

d) $S = \frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng vì theo giả thiết $f(x) + xf'(x) = 4x^3 + 4x + 2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(0) = 2$.

b) Đúng vì ta có $f(x) + xf'(x) = 4x^3 + 4x + 2 \Leftrightarrow (x)' \cdot f(x) + x \cdot f'(x) = 4x^3 + 4x + 2$

$$\Leftrightarrow [xf(x)]' = 4x^3 + 4x + 2 \Rightarrow xf(x) = \int (4x^3 + 4x + 2) dx = x^4 + 2x^2 + 2x + C (*)$$

Cho $x = 0$ ta được $C = 0$.

$$(*) \Rightarrow f(x) = x^3 + 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2$$

c) Sai vì phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ là

$$f(x) = f'(x) \Leftrightarrow x^3 + 2x + 2 = 3x^2 + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy $S = \int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx$.

d) Đúng vì $S = \int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx = \frac{1}{2}$.

Câu 3: Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 5x + 4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$.

a) Diện tích $S = \int_0^3 |x^2 - 5x + 4| dx$.

b) Diện tích $S = \int_0^3 (x^2 - 5x + 4) dx$.

c) $S = \int_0^3 (x^2 - 5x + 4) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right) \Big|_0^3.$

d) Diện tích $S = \frac{31}{6}.$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng: diện tích $S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_0^3 |x^2 - 5x + 4| dx.$

b) Sai: ta có $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

Phương trình có một nghiệm $x = 1$ thuộc $[0; 3]$.

$x^2 - 5x + 4 \geq 0$ với mọi $x \in [0; 1]$ và $x^2 - 5x + 4 \leq 0$ với mọi $x \in [1; 3]$

$S = \int_0^3 |x^2 - 5x + 4| dx = \int_0^1 (x^2 - 5x + 4) dx + \int_1^3 -(x^2 - 5x + 4) dx$

c) Sai: $S = \int_0^1 (x^2 - 5x + 4) dx + \int_1^3 -(x^2 - 5x + 4) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right) \Big|_0^1 - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right) \Big|_1^3.$

d) Đúng: diện tích $S = \frac{11}{6} - \left(-\frac{10}{3} \right) = \frac{31}{6}.$

Câu 4: Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị của hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x - 1$, $y = g(x) = x - 1$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 4$.

a) Diện tích $S = \int_1^4 |x^2 - 3x - 2| dx.$

b) $S = \int_0^3 |x^2 - 3x| dx + \int_3^4 |x^2 - 3x| dx.$

c) $S = \left| \int_0^3 (x^2 - 3x) dx \right| + \left| \int_3^4 (x^2 - 3x) dx \right|$

d) Diện tích $S = \frac{31}{6}.$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Sai: diện tích $S = \int_1^4 |x^2 - 2x - 1 - (x - 1)| dx = \int_1^4 |x^2 - 3x| dx.$

b) Sai: ta có $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

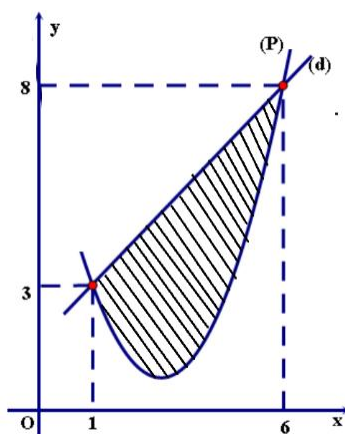
Phương trình có một nghiệm $x = 3$ thuộc $[1; 4]$.

$$S = \int_1^3 |x^2 - 3x| dx + \int_3^4 |x^2 - 3x| dx$$

c) Đúng: $S = \int_1^3 |x^2 - 3x| dx + \int_3^4 |x^2 - 3x| dx = \left| \int_1^3 (x^2 - 3x) dx \right| + \left| \int_3^4 (x^2 - 3x) dx \right|$

d) Đúng: $S = \left| -\frac{10}{3} \right| + \left| \frac{11}{6} \right| = \frac{31}{6}$.

Câu 5: Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S = \frac{125}{9}$.



a) Phương trình đường thẳng d là $y = x + 2$.

b) $\int_1^6 f'(x) dx = 5$.

c) $S = \int_1^6 [f(x) - (x + 2)] dx$.

d) $\int_1^6 f(x) dx = \frac{745}{18}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng vì đường thẳng $d: y = ax + b$.

d đi qua hai điểm $(1; 3)$ và $(6; 8)$ nên $\begin{cases} a + b = 3 \\ 6a + b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow d: y = x + 2$.

b) Đúng vì $\int_1^6 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^6 = f(6) - f(1) = 8 - 3 = 5$.

c) Sai vì diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x + 2, y = f(x), x = 1, x = 6$ là

$$S = \int_1^6 [(x+2) - f(x)] dx.$$

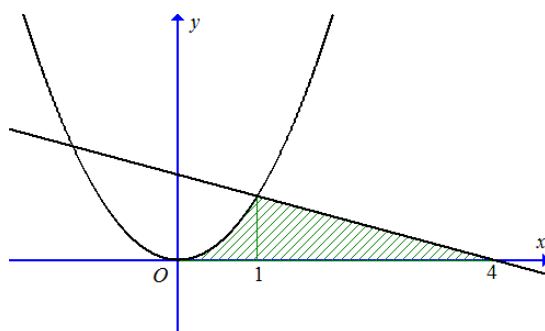
d) Sai vì $S = \int_1^6 [(x+2) - f(x)] dx = \frac{125}{9} \Leftrightarrow \frac{55}{2} - \int_1^6 f(x) dx = \frac{125}{9} \Leftrightarrow \int_1^6 f(x) dx = \frac{245}{18}.$

Câu 6: Cho đường $y = x^2$ có đồ thị là (P) , $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ có đồ thị là (d) và trục hoành.

Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi (P) , trục hoành và đường thẳng $x = 1$

Gọi S_2 là diện tích giới hạn bởi (d) , trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = 4$

Gọi S là diện tích giới hạn bởi (P) , (d) và trục hoành.



a) $S_1 = \frac{1}{3}$

b) $S_2 = \frac{3}{2}$

c) $S = S_1 + S_2$

d) $S = \frac{11}{6}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) $S_1 = \int_0^1 |x^2| dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, do đó: $S_1 = \frac{1}{3}$ là mệnh đề đúng

b) $S_2 = \int_0^4 \left| -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right| dx = \frac{8}{3}$, do đó: $S_2 = \frac{3}{2}$ là mệnh đề sai

c) $S = \int_0^1 |x^2| dx + \int_1^4 \left| -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right| dx = \frac{11}{6} \neq S_1 + S_2$, do đó: $S = S_1 + S_2$ là mệnh đề sai

$$\text{d)} S = S = \int_0^1 |x^2| dx + \int_1^4 \left| -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right| dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x \right) \Big|_1^4 = \frac{11}{6}$$

, do đó: $S = \frac{11}{6}$ là mệnh đề đúng

Câu 7: Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = 2e^x$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$.

a) Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng

$$x = 0, x = 4 \text{ là } S = \pi \int_0^4 x dx.$$

b) Gọi V là thể tích của khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ khi quay quanh trục Ox . Khi đó, $V = 2\pi(e^8 - 1)$

c) Diện tích của hình H là $S_H = 2e^4 - \frac{16}{3}$.

d) Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi hình H khi quay quanh trục Ox là $2\pi(e^8 - 5)$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai

Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng

$$x = 0, x = 4 \text{ là } S = \int_0^4 \sqrt{x} dx.$$

b) Đúng

Gọi V là thể tích của khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ khi quay quanh trục Ox .

$$\text{Khi đó, } V = \pi \int_0^4 (2e^x)^2 dx = \pi \int_0^4 4e^{2x} dx = 2\pi e^{2x} \Big|_0^4 = 2\pi(e^8 - 1)$$

c) Sai

$$\text{Diện tích của hình } H \text{ là } S_H = \int_0^4 |2e^x - \sqrt{x}| dx = \int_0^4 (2e^x - \sqrt{x}) dx = \left(2e^x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} \right) \Big|_0^4 = 2e^4 - \frac{22}{3}.$$

(Vì $2e^x - \sqrt{x} > 0, \forall x \in [0; 4]$)

d) Đúng

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi hình H khi quay quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_0^4 \left| (2e^x)^2 - (\sqrt{x})^2 \right| dx = \pi \int_0^4 |4e^{2x} - x| dx = \pi \int_0^4 (4e^{2x} - x) dx = \pi \left(2e^{2x} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = 2\pi(e^8 - 5)$$

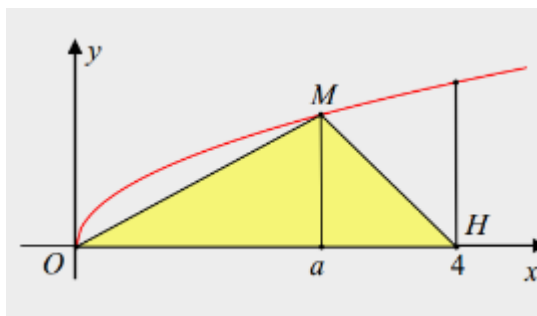
Câu 8: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

a) Công thức tính diện tích hình phẳng (H) là $\int_0^4 \sqrt{x} dx$.

b) Diện tích hình phẳng (H) là $\frac{19}{6}$.

c) Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 4$ và trục hoành Ox là 8π .

d) Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 4$ và trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M .



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác MOH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó $a = 3$.

Lời giải

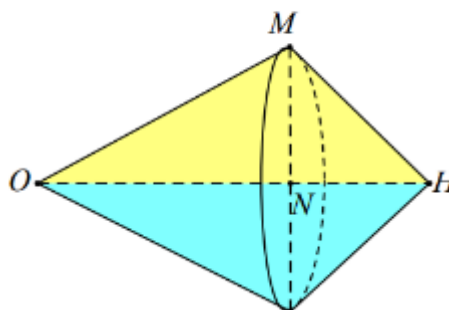
a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Ta có $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx$. Vậy a) Đúng.

b) $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{16}{3}$. Vậy b) Sai

c) Ta có $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi$. Vậy c) Đúng

d) $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi \Rightarrow V_1 = \frac{V}{2} = 4\pi$

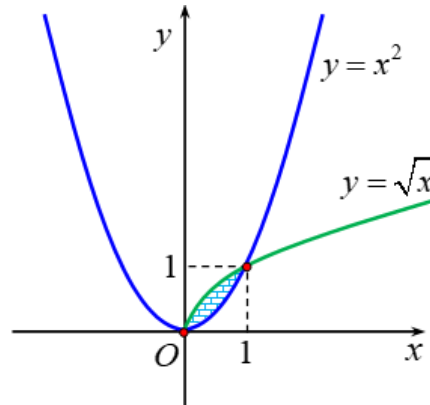


Tam giác MOH quanh trục Ox tạo nên hai khối nón chung đáy. Gọi N là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Suy ra $r = MN = y_M = y(a) = \sqrt{a}$.

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot OH \cdot \pi r^2 = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \pi \cdot (\sqrt{a})^2 = \frac{4\pi a}{3}. \text{ Suy ra } 4\pi = \frac{4\pi a}{3} \Rightarrow a = 3$$

Vậy d) Đúng.

Câu 9: Cho hình phẳng được tô trong hình bên dưới.



- a) Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2; y = \sqrt{x}$
- b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\frac{1}{3}$.
- c) Thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng trên quanh trục Ox là $\pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$.
- d) Thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $(P): y = x^2; (C): y = \sqrt{x}$ quanh trục Oy bằng $\frac{3\pi}{10}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng

Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2; y = \sqrt{x}$

b, Đúng

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}.$$

Khi đó diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị $y = x^2; y = \sqrt{x}$ là:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3}.$$

c, Sai

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 - x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Khi đó thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng trên quanh trục Ox là $\pi \int_0^1 (x - x^4) dx$.

d, **Đúng**

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 - x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Mặt khác:

$$(P): y = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ x = -\sqrt{y} \end{cases} (y \geq 0)$$

$$(C): y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$$

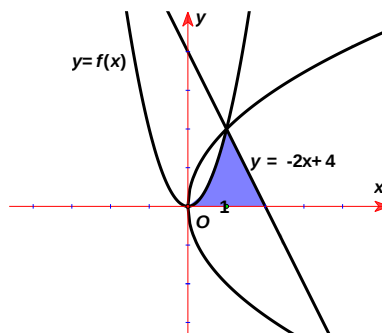
$$\text{Xét } (H_1): \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ Oy \\ y = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ quay quanh } Oy \text{ được } V_1$$

$$\text{Xét } (H_2): \begin{cases} x = y^2 \\ Oy \\ y = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ quay quanh } Oy \text{ được } V_2$$

Do đó, thể tích cần tìm chính là:

$$V = V_1 - V_2 = \pi \left[\int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy - \int_0^1 (y^2)^2 dy \right] = \frac{3\pi}{10}.$$

Câu 10: Cho đồ thị các hàm số $y = f(x) = 2x^2$, $y = -2x + 4$, đường parabol $y^2 = 4x$ và hình phẳng (S) được tô màu như hình vẽ bên dưới.



- a) Phần hình phẳng (S) được giới hạn bởi các đường $y^2 = 4x$, $y = -2x + 4$ và trục Ox .
- b) Diện tích của phần hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ được tính bởi công thức $S = \int_0^1 2x^2 dx$.
- c) Diện tích của phần hình phẳng (S) được tính bởi công thức $S = \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^2 (2x - 4) dx$.
- d) Diện tích của phần hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2$ và đường $y^2 = 4x$ là $\frac{2}{3}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

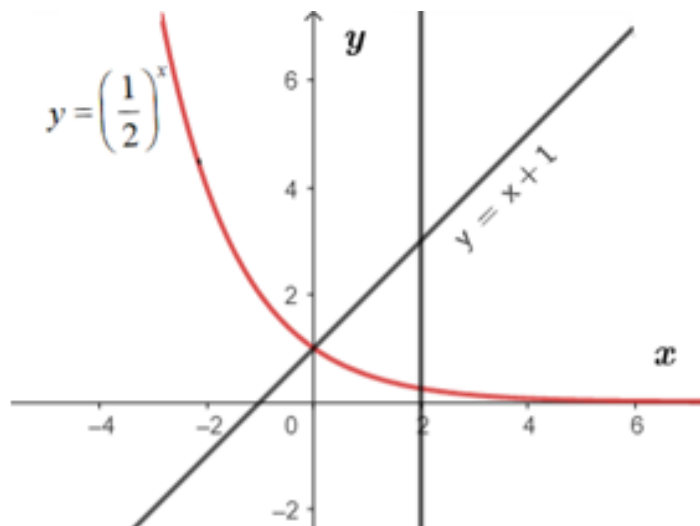
- a) Phần hình phẳng (S) được giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$, $y = -2x + 4$ và trục Ox .
- b) Diện tích của phần hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ được tính bởi công thức $S = \int_0^1 2x^2 dx$.
- c) Diện tích của phần hình phẳng (S) được tính bởi công thức $S = \int_0^1 |2x^2| dx + \int_1^2 |-2x + 4| dx = \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^2 (-2x + 4) dx$.
- d) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x^2$ và đường $y^2 = 4x$ là nghiệm của phương trình $4x^4 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Với $x \in (0;1)$, ta có $y^2 = 4x \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x}$.

Diện tích của phần hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^2$ và đường $y^2 = 4x$ là:

$$S = \int_0^1 (2\sqrt{x} - 2x^2) dx = \frac{2}{3}.$$

Câu 11: Cho đồ thị các hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = x + 1$ như hình vẽ bên dưới:



a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x + 1$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ và hai đường thẳng

$x = 0$; $x = 2$. Được tính bởi công thức: $S = \int_0^2 \left[x + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \right] dx$.

b) Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$ quanh trục Ox . Được tính bởi công thức:

$$V_1 = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\right)^x dx.$$

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x + 1$, $y = 0$ và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$ bằng: 4.

d) Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

, $y = x + 1$ và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$ quanh trục Ox bằng: 26.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Từ hình vẽ ta có: $x + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$ nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số

$y = x + 1$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$. Được tính bởi công thức:

$$S = \int_0^2 \left| x + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \right| dx = \int_0^2 \left[x + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \right] dx.$$

b) Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$ quanh trục Ox .

Được tính bởi công thức: $V_1 = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} dx$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x + 1$, $y = 0$ và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$

là: $S = \int_0^2 (x + 1) dx = 4$.

d) Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = x + 1$ và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$ quanh trục Ox là:

$V = \pi \int_0^2 \left| (x + 1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \right| dx \approx 25,1$.

Câu 12: Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ (P) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 4$.

a) Diện tích S được xác định theo công thức $S = \int_0^4 x^2 dx$.

b) Khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích $V = \frac{1024}{5}$.

c) Đường thẳng $y = 4$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau.

d) Gọi A , B là hai điểm thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{4}{3}$.

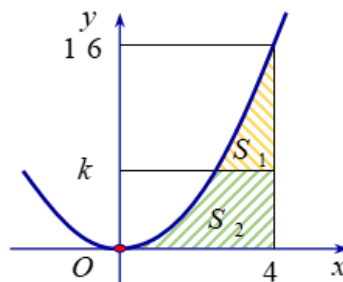
Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Ta có: $S = \int_0^4 x^2 dx = \int_0^4 x^2 dx$.

b) Ta có: $V = \pi \int_0^4 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^4 x^4 dx = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^4 = \frac{1024\pi}{5}$.

c)

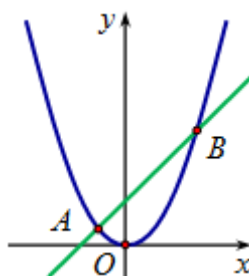


Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^2$ và $y = 4$ là $x = 2$.

Do đó diện tích $S_1 = \int_2^4 (x^2 - 4) dx = \frac{32}{3}$, diện tích $S_2 = \int_0^4 x^2 dx - S_1 = \frac{32}{3}$.

Do đó, $S_1 = S_2$.

d)



Cách 1: Gọi $A(a; a^2)$, $B(b; b^2)$ với $a < b$.

Ta có: $AB = 2 \Leftrightarrow (b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 4$

$$AB: \frac{x-a}{b-a} = \frac{y-a^2}{b^2-a^2} \Leftrightarrow \frac{x-a}{1} = \frac{y-a^2}{b+a}$$

$$\Leftrightarrow y = (a+b)(x-a) + a^2 \Leftrightarrow y = (a+b)x - ab$$

$$S = \int_a^b ((a+b)x - ab - x^2) dx = \int_a^b (x-a)(b-x) dx$$

Đặt $t = x - a$. Suy ra **A**.

$$S = \int_0^{b-a} t(b-a-t) dt = \int_0^{b-a} ((b-a)t - t^2) dt = \left. \frac{(b-a)t^2}{2} \right|_0^{b-a} - \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^{b-a} = \frac{(b-a)^3}{6}$$

Ta có:

$$(b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 4 \Leftrightarrow (b-a)^2 (1 + (b+a)^2) = 4 \Leftrightarrow (b-a)^2 = \frac{4}{1 + (a+b)^2} \leq 4$$

$$\text{Suy ra } b-a \leq 2 \Rightarrow S = \frac{(b-a)^3}{6} \leq \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a+b=0 \\ b-a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow A(-1;1); B(1;1).$$

Vậy giá trị lớn nhất của AB bằng $\frac{4}{3}$.

Chú ý: Khi làm trắc nghiệm ta có thể dự đoán (linh cảm:D) a , b đối nhau, nghĩa là: $a+b=0$.

Từ đó, thay vào $(b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 4$, tìm được $a = -1$, $b = 1$. Suy ra **A**. $A(-1;1); B(1;1)$.

Viết phương trình: $AB: y = 1$. Từ đó: $S = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}$.

Hoặc cũng linh cảm, đặc biệt hóa AB song song với Ox , từ đó cũng tìm được $a + b = 0$.

Cách 2: Sử dụng công thức diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = ax^2 + bx + c$ và

$(d): y = mx + n$.

Đầu tiên ta lập phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$ax^2 + bx + c = mx + n \Leftrightarrow ax^2 + (b - m)x + c - n = 0.$$

Khi đó diện tích hình phẳng là: $S^2 = \frac{\Delta^3}{36a^4}$, với $\Delta = (b - m)^2 - 4a(c - n)$.

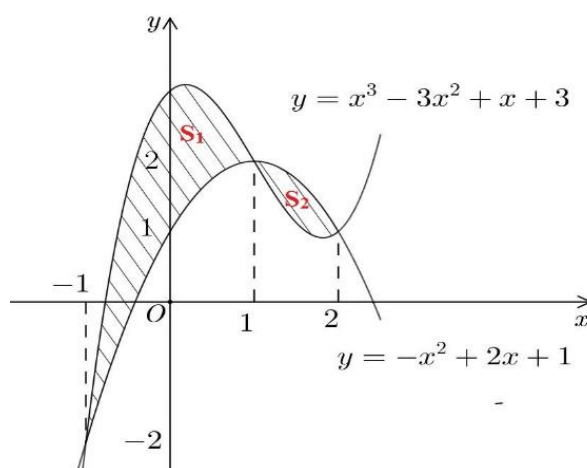
Áp dụng:

Tương tự, ta có $(AB): y = (a + b)x - ab$, $a < b$.

PTHĐGD: $x^2 = (a + b)x - ab \Leftrightarrow x^2 - (a + b)x + ab = 0$, có $\Delta = (b - a)^2$.

Suy ra $S^2 = \frac{\Delta^3}{36} = \frac{(b - a)^6}{36} \Rightarrow S = \frac{(b - a)^3}{6}$ và đánh giá như cách 1.

Câu 13: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 3(P)$ và $y = -x^2 + 2x + 1(H)$.



Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P) và (H) như hình vẽ.

a) Diện tích phần hình phẳng (E) được gạch sọc tính theo công thức $\int_{-1}^2 (-x^3 + 2x^2 + x - 2) dx$.

b) $S_1 = 3S_2$.

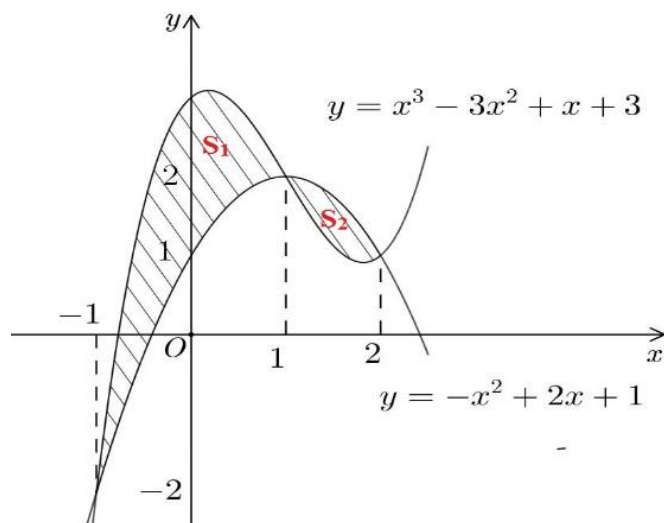
c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (H) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ bằng $\frac{10}{3}$.

d) Khi quay hình phẳng (E) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích $V = \frac{185}{21}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a)



+ Phần S_1 : phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$, $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ và các đường thẳng $x = -1$, $x = 1$.

Dựa vào đồ thị ta có $S_1 = \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx = \frac{8}{3}$.

+ Phần S_2 : phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$, $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2$.

Dựa vào đồ thị ta có $S_2 = \int_1^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_1^2 (-x^3 + 2x^2 + x - 2) dx = \frac{5}{12}$.

Vậy $S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx + \int_1^2 (-x^3 + 2x^2 + x - 2) dx$.

b) $S_1 = \frac{32}{5} S_2$.

c) $S = \int_0^2 [g(x)] dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x + 1) dx = \frac{10}{3}$.

d) Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (E) quanh trục Ox với các đường thẳng $x = -1$; $x = 1$ và $x = 2$.

+) $V_1 = \pi \int_{-1}^1 [f^2(x) - g^2(x)] dx = \frac{160}{21}$;

+) $V_2 = \pi \int_1^2 [g^2(x) - f^2(x)] dx = \frac{25}{21}$.

Vậy $V = V_1 + V_2 = \frac{185}{21}$.

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho nửa hình tròn (C): $x^2 + y^2 = 8, y \geq 0$.

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn (C) là: $S = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2} dx$.

b) Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn (C) quanh trục

hoành là: $V = \pi \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (8 - x^2) dx.$

c) Đường thẳng $y = 2$ chia nửa hình tròn (C) thành hai phần, phần có diện tích bé hơn bằng $2\pi - 8.$

d) Parabol (P): $y = \frac{x^2}{2}$ chia hình tròn thành hai phần. Gọi S_1 là diện tích phần nhỏ, S_2 là diện tích phần lớn. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2} < 1.$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------------	----------------	---------------	---------------

Xét phương trình $y = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}.$

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn (C) là: $S = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2} dx.$

b) Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn (C) quanh trục

hoành là: $V = \pi \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} y^2 dx = \pi \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (8 - x^2) dx.$

c) Xét phương trình: $y = 2 \Leftrightarrow \sqrt{8 - x^2} = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

Gọi $S_1 = \int_{-2}^2 (\sqrt{8 - x^2} - 2) dx = 2\pi - 4, S_2 = \frac{1}{2} S - S_1 = 2\pi + 4 \Rightarrow S_1 < S_2.$

d) Giao điểm của (P) và (C) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 (1) \\ y = \frac{x^2}{2} (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được: $x^2 + \frac{x^4}{4} = 8 \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 = -8 (L) \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2$

Phần nhỏ giới hạn bởi các đường $y = \frac{x^2}{2}; y = \sqrt{8 - x^2}; x = -2; x = 2$ nên ta có:

$$S_1 = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \underbrace{\int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - x^2} \right) dx}_A - \underbrace{\int_{-2}^2 \frac{x^2}{2} dx}_B$$

Tính $A = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - x^2} \right) dx$

Đặt $x = 2\sqrt{2} \sin t \Rightarrow dx = 2\sqrt{2} \cos t dt.$

Đổi cận: $x = -2 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}; x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}.$

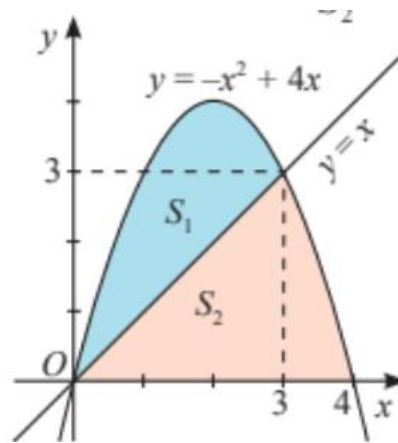
$$A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8-8\sin^2 t} \cdot 2\sqrt{2} \cos t dt = 8 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = 4 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi + 4.$$

$$B = \int_{-2}^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{8}{3}.$$

$$\Rightarrow S_1 = 2\pi + \frac{4}{3} \Rightarrow S_2 = \frac{1}{2} \pi R^2 - S_1 = 2\pi - \frac{4}{3}.$$

$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} \approx 1,5 > 1.$$

Câu 15: Cho S_1, S_2 là diện tích các hình phẳng được mô tả trong hình bên.



a) Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x$, trục hoành và $x = 0, x = 4$ bằng $\frac{32}{3}$.

b) Diện tích $S_1 = \frac{9}{2}$.

c) Diện tích $S_2 = 8$.

d) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{27}{37}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng: $S = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \frac{32}{3}.$

b) Đúng: $S_1 = \int_0^3 |-x^2 + 4x - x| dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = \frac{9}{2}.$

c) Sai: $S_2 = \int_0^3 x dx + \int_3^4 (-x^2 + 4x) dx = \frac{37}{6}.$

d) Đúng: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{27}{37}$.

Câu 16: Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi $(C): y = x^2$, đường thẳng $x = a, (a > 0)$, và trục tọa độ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $S = \int_0^a x^2 dx$.

b) $S = \frac{a^3}{3}$.

c) Nếu $S = \frac{1}{2}$ thì $a = 1$.

d) Khi $a = 1$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox bằng $\frac{1}{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

+ Ta có diện tích hình phẳng (H) là $S = \int_0^a x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{a^3}{3}$

+ $S = \frac{a^3}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^3 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

+ $a = 1 \Rightarrow V = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$.

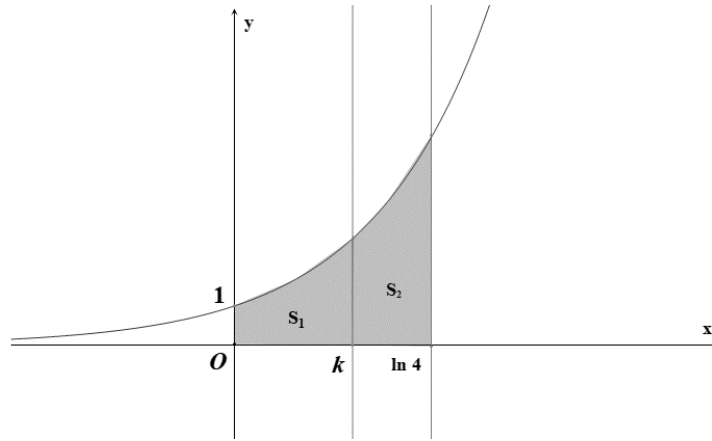
a) Đúng: theo công thức tính diện tích hình phẳng.

b) Đúng: Vì $S = \frac{a^3}{3}$.

c) Sai: Vì $a = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \neq 1$.

d) Sai: Vì $V = \frac{\pi}{5} \neq \frac{1}{3}$.

Câu 17: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần (H_1) và (H_2) có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



a) Khi $k = 1$ thì $S_1 = \int_0^1 e^x dx$.

b) Khi $k = 1$ thì $\frac{S_1}{S_2} = \frac{e-1}{2}$.

c) Nếu $S_1 = 2S_2$ thì $k = \ln 3$

d) Khi quay các hình phẳng $(H_1), (H_2)$ quay xung quanh trục Ox ta được các khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1, V_2 thỏa $V_1 = V_2$ thì $k = \frac{1}{2} \ln 17$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

+ Khi $k = 1$ thì $S_1 = \int_0^1 e^x dx$. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\int_0^1 e^x dx}{\int_1^{\ln 4} e^x dx} = \frac{e^x \Big|_0^1}{e^x \Big|_1^{\ln 4}} = \frac{e-1}{4-e}$.

+ $S_1 = 2S_2 \Leftrightarrow \int_0^k e^x dx = 2 \int_k^{\ln 4} e^x dx \Leftrightarrow e^k - 1 = 2(4 - e^k) \Leftrightarrow e^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3$.

+ $V_1 = V_2 \Rightarrow \pi \int_0^k e^{2x} dx = \pi \int_k^{\ln 4} e^{2x} dx \Leftrightarrow e^{2x} \Big|_0^k = e^{2x} \Big|_k^{\ln 4} \Leftrightarrow e^{2k} - 1 = 16 - e^{2k} \Leftrightarrow e^{2k} = 17 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \ln 17$.

a) Đúng: vì theo công thức tính diện tích hình phẳng.

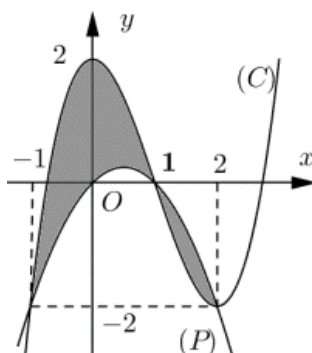
b) Sai: Vì khi $k = 1$ thì $\frac{S_1}{S_2} = \frac{e-1}{4-e} \neq \frac{e-1}{2}$.

c) Đúng: Vì $S_1 = 2S_2 \Rightarrow k = \ln 3$.

d) Đúng: Vì $V_1 = V_2 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \ln 17$.

Câu 18: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$ của hàm đa thức bậc ba và parabol

(P): $y = g(x)$ có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



a) $S = \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx$

b) $S = \int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx + \int_1^2 (g(x) - f(x)) dx$.

c) $S = \frac{37}{12}$.

d) Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi (C), (P) và 2 đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ xung quanh trục Ox bằng $\frac{191}{210}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

$$\begin{aligned}
 + \text{Diện tích phần tô đậm } S &= \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx + \int_1^2 |f(x) - g(x)| dx \\
 &= \int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx + \int_1^2 (g(x) - f(x)) dx
 \end{aligned}$$

Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y = 2, y = 0$ nên ta xét hai hàm số là $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$, $g(x) = mx^2 + nx$.

* Vì đồ thị hai hàm số cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x = -1; x = 1; x = 2$ nên ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$$ax^3 + bx^2 + cx + 2 = mx^2 + nx \Leftrightarrow a(x+1)(x-1)(x-2) = 0. \text{ Với } x = 0 \text{ ta được } 2a = 2 \rightarrow a = 1.$$

*Vậy diện tích phần tô đậm là: $S = \int_{-1}^2 |(x+1)(x-1)(x-2)| dx = \frac{37}{12}$.

Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi (C), (P) và 2 đường thẳng

$$x = 1, x = 2 \text{ xung quanh trục } Ox: V = \left| \pi \int_1^2 (f^2(x) - g^2(x)) dx \right| = \frac{191}{210} \pi.$$

a) Đúng: Vì theo công thức tính diện tích.

b) Đúng vì: $S = \int_{-1}^1 (f(x) - g(x))dx + \int_1^2 (g(x) - f(x))dx$

c) Đúng vì: $S = \frac{37}{12}$.

d) Sai vì $V = V = \frac{191}{210}\pi \neq \frac{191}{210}$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là V . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) $f(1) = e$.

b) $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $S_H > 2$.

d) $V > 15$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (2 - 2x) dx$.

$\Leftrightarrow \ln f(x) = 2x - x^2 + C \Leftrightarrow f(x) = A e^{2x - x^2}$. Mà $f(0) = 1$ suy ra $f(x) = e^{2x - x^2}$.

a) Đúng vì $f(1) = e$.

b) Sai vì $f'(x) = (2 - 2x) \cdot e^{2x - x^2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$.

c) Đúng vì $S_H = \int_1^2 e^{2x - x^2} dx = 2.03 > 2$.

d) Sai vì $V = \pi \cdot \int_1^2 (e^{2x - x^2})^2 dx = 13.88 < 15$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục với mọi $x \neq 0$ thỏa mãn: $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ với $x \neq 0$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$. Quay (H) xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích là V .

a) $\int_1^2 f'(x) dx = -2$.

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(1; 2)$.

c) $S_H = \frac{1}{2}$

d) $V = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

Ta có: $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ (1)

Thay x bởi $\frac{1}{x}$ ta có: $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x}$ (2)

Từ (1) (2) suy ra: $f(x) = \frac{2}{x} - x$

a) Đúng vì $\int_1^2 f'(x).dx = f(2) - f(1) = -2$.

b) Sai vì $f(x) = \frac{2}{x} - x \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^2} - 1$ nên hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$.

c) Đúng vì $S_H = \int_1^2 \left| \frac{2}{x} - x \right|.dx = \frac{1}{2}$.

d) Đúng vì $V = \pi \cdot \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - x \right)^2 dx = \frac{\pi}{3}$.